数理解析研究所講究録
467巻 1982年 64-73

generalized 4 manifold について

東大理　上　正明

(Masaaki Ue)

ENR (Euclidean neighborhood retract) X が次の条件をみたすとき n 次元 generalized manifold であるという.

(*) 任意の点 $x \in X$ に対して $H_*(X, X-x : \mathbb{Z}) = H_*(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0 : \mathbb{Z})$ for $\forall *$.

X に対しそのnonmanifold set を $N(X) = \{x \in X \mid X$ は x において locally euclidean でない$\}$ とおく. ここでは次のことを示す

定理I. X を閉じた単連結4次元 generalized manifold で $X \times \mathbb{R}$ は5次元位相多様体とする. このとき ある4次元位相多様体 M が存在して $M \times \mathbb{R}$ は $X \times \mathbb{R}$ に位相同型である.

またこれを次のように relative form にすることができる。

定理II. X を閉じた単連結4次元 generalized manifold でその non manifold set $N(X)$ は孤立点，かつ $X-N(X)$ は smooth manifold の構造をもつとする。このとき $N(X)$ の近傍 N で ∂N が連結な smooth submanifold of $X-N(X)$ なるものに対し，ある4次元位相多様体 M で $\overline{X-N} \cup_{\partial N} M_0$ なるものが存在し，位相同型 $f: X\times\mathbb{R} \longrightarrow M\times\mathbb{R}$ で $f|\overline{X-N}\times\mathbb{R} = id$ なるものがある。ただし M_0 は $\partial M_0 = \partial N$ なる4次元位相多様体。

位相多様体が1点を除いて smooth manifold の構造をもつとき almost smooth であるという。定理I, II の M は almost smooth にとれる。また定理IIの X について $X\times\mathbb{R}$ は必然的に位相多様体である。何故なら X に対し $\dim N(X) = 0$ なので $X\times\mathbb{R}$ は DDP をもつ（[Cannon]）即ち任意の D^2 から $X\times\mathbb{R}$ への2つの連続写像は image が disjoint なるようにいくらでも近似することができる。また一方 Quinn の結果から $X\times\mathbb{R}$ は resolution をもつ。即ち，ある位相多様体（5次元）から $X\times\mathbb{R}$ へ CE 写像がとれる。これは Edwards の近似定理から位相同型で近似可能。よって $X\times\mathbb{R}$ は多様体で

ある．[Freedman]により 単連結でalmost smoothな4次元多様体の分類がなされたので，定理I，IIともその結果を利用して示すことができる．特に 1-connected end in dimension 5 に関するFreedmanとQuinnの結果（それはF-manifoldなる概念によって記述された）はTOP manifold versionにかきかえることができるので，上記の定理Iはその証明と類似な方法で示すことができる．以下証明のoutlineを示す．簡単のため定理IIの証明を重点的に述べる．

まず次のpropositionを用意する．

<u>Proposition</u>. (W, M, M')を compact 単連結（$\pi_1 W = 1$ $\pi_1 M = \pi_1 M' = 1$）TOP cobordismでWの次元$=5$，M，M'はalmost smoothな4次元位相多様体とする．

(i) MとM'のnon smooth pointsを結ぶWのarc kを適当にとると，$W-k$上に$M-k$，$M'-k$の与えられたsmooth構造を拡張することができる．

(ii) 上記のkをflatにとることができ，$(W-k, M-k)$のlocally finiteで（一般にはinfiniteな）handle decompositionで1つの2 handlesの層とその上にある1つの3 handlesの層のみからなるものが存在する．

(i) は $M-k \cup M'-k$ の smooth structure を $W-k$ 上に拡張する為の障害 $\theta \in H^4(W-k, \partial W-k : \mathbb{Z}_2)$ が 0 である(実際 $H^4(W-k, \partial W-k : \mathbb{Z}_2)$ 自体が 0)ことから従う. また (ii) は Quinn の ε-geometrical connectivity に他ならない. k が flat にとれることは [Freedman] の主定理の証明におけるのと同様である. いずれも既知の結果である.

さらに [Freedman] の結果中次のことを使う

[Freedman] ① 5次元の Proper h cobordism 定理. (W, M, M') が5次元 smooth 単連結な proper h cobordism でその end は有限個かつすべての end は 1 connected とする. このとき (W, M, M') は product cobordism に homeo である.

[〃] ② 位相的横断正則性定理. 特に最も単純な場合に限定して述べると次のようになる.

M^5 を5次元多様体. $f: M^5 \longrightarrow \mathbb{R}$ 連続写像とする. このとき f を近似する写像 f' を適当にとると $f'^{-1}(0)$ は almost smooth な4次元多様体となるようにできる.

まず $X\times R$ に横断正則性定理を利用して 写像 $f: X\times R \to R$ で任意の $m\in Z$ に対して $f^{-1}(m)$ が almost smooth な位相多様体であるものをとる。

$(W, M) = (f^{-1}[0,\infty), f^{-1}(0))$ とおいて surgery により (W, M) の connectivity を上げることを考える。まず index ≤ 2 の handle の trade により $\pi_1 M \cong \pi_1 W = 1$, $H_*(W, M) = 0$ $* \leq 2$ とできる。このとき trade される handle は M に "smooth" に attach されるとしてよい。実際横断正則性定理の証明([Scharlemann]の方法の改変)において $X\times R$ の中の locally flat な arcs と circles の union L を適当にとると $X\times R - L$ は smooth manifold の構造をもち $\eta(L)$ を L の tub nbd とすると $(X\times R - \eta(L))\cap M$ が smooth in $X\times R - L$ であるように M をとれる。そこで attach される handle は L と交わらないように(general position)とっておけばよい。そこで改変後の pair も (W, M) とかくことにすると M almost smooth としてよい。(一般に M に non smooth points が有限個生じうるがこれらを適当に arc でつなぎ shrink することから almost smooth としてよい)。すると duality により

$H_*(W, M) = H_*(\overline{W}, M) \cong H^{5-*}(\overline{W}, X) = 0$ for

$* \geq 4$ となる。ただし $X \times \mathbb{R} \approx X \times (0,1) \subset X \times (0,1]$ とし $\overline{W} = W \cup X \times \{1\} \subset X \times (0,1]$ とおいている。そこで結局

$$H_*(W, M) = 0 \quad * \neq 3$$

$$H_3(W, M) \text{ は 有限生成 free module}$$

である。そこで問題は $H_3(W, M)$ を消すことである。$H_3(W, M)$ は有限生成なので十分大きい m に対し $U = \overline{W - f^{-1}[m, \infty)}$ とおくと $H_3(U, M) \longrightarrow H_3(W, M)$ は onto となる。特に $(f^{-1}[m, \infty), f^{-1}(m))$ に対しても上記の条件をみたすようにとれるので exact seq を計算すると $H_3(U, M) \cong H_3(W, M)$ となることがわかる。このとき $(U, M, f^{-1}(m) = M')$ に Proposition を適用して適当な arc k に対し $(U-k, M-k, M'-k)$ は smooth cobordism で 2, 3 handle のみからなる locally finite な handle decomposition をもつとしてよい。このとき $(U-k, M-k)$ の chain の構造から $H_3(U, M)$ の生成元として $(U-k, M-k)$ の有限個の 3 handles をとれることがわかる。(これは高次元の場合と同様) それらを $h_1, \cdots h_p$ とおく。これらが M に直接 attach されるよう改変できれば $H_3(W, M)$ を消すことができるが、これを保障するためには Whitney トリックを利用しなければならない。まず $U-k$

6

のハンドル分解の中間のレベル V をとると V 上に

$\beta_i = \partial h_i$ (h_i の attaching 2 spheres) $i=1,\cdots p$ と

2 handles の cocore の boundary α_j がのっている。

handle 分解が locally finite だから β_i's と交わるのは有限個 $\alpha_1, \cdots \alpha_q$ であるとしてよい。今 $V-k$ の 2 handles と 3 handles の dual である 2 handles はいずれも trivial に attach されているので

$$\pi_1(V - \bigcup_{j=1}^{\infty}\alpha_j) = \pi_1(V - \bigcup^{p}\beta_i) = \pi_1 V = 1$$

である。さらに $H_1(V - \bigcup_{j=1}^{\infty}\alpha_j - \bigcup^{p}\beta_i) = 0$ であるから [Freedman] におけるのと同様 Casson trick を施して (特にここでは $\cup\beta_i$ と $\cup\alpha_j$ との交わりを増やし、自己交叉は必要ない) $\pi_1(V - \bigcup^{\infty}\alpha_j - \bigcup^{p}\beta_i) = 1$ にできる。ここで上記の条件 $H_1 = 0$ は $\partial: H_3(W, M) \longrightarrow H_2(M)$ が $H_2(M)$ の direct summand への injection であることを使って証明される。このことは (W, M) の connectivity の条件及び (W, M) の homology の exact seq から従う。さらに

$$\beta_i \cdot \alpha_j = 0 \quad (\forall i, \forall j)$$

であることは chain complex の構造から従う。これらのことから β_i と α_j の余計な交わりに対して immersed Whitney disk をはることができる。(しかも $\cup\alpha_i \cup \cup\beta_j$ と交わらない

様に)。いま[Freedman]の定理から immersed Whitney disk を直接 flat TOP disk におきかえることができるから TOP Whitney trick で $h_1 \sim h_p$ を直接 M に attach するようにできるが(proper h-cobordism の証明にも同様な論法が使われた) この場合 handle trade 後の多様体(やはり M と書く)は almost smooth かどうか直ちにはわからない。これを almost smooth なるように改変することは $V-K$ における V のカラー $V\times[0,1]$ の中に、次のような h-cobordism をうめこむことにより達成される。すなわち、V とある4次元多様体 V' の間の h-cobordism W' で $\alpha_j \cup \beta_j$ の近傍 $\subset V$ 上 W' は product かつ V' において $(\cup\beta_j)\cap(\cup\alpha_i)$ に対する Whitney disk は smooth in V' にとれる(しかも $\cup\beta_j \cup \cup\alpha_j$ と交わらない)。このような W' は、V にまずいくつかの $S^2\times S^2$ を連結和をとり(その中で immersed Whitney disk を smooth に改変)次に余分な $S^2\times S^2$ に対応する homology class を $\cup\alpha_j \cup \partial\beta_i$ 及び Whitney disks と交わらない TOP 2 handle で表わし、それで surgery することにより得られる。W' は surgery の trace を改変して作られる。(Freedman-Quinn の定理におけるのとほぼ同様) 新たに生成される V' が almost smooth にできること

はたとえば Bing の shrinking criterion にもちこむことで証明される。この $V \times I$ の中にうめこまれた V' を利用し、$\cup \alpha_j$ と $\cup \beta_j$ の余計な交叉に対し V' における smooth Whitney disk を使って Whitney trick を行ない、これによって 3 handles $h_1 \sim h_p$ を改変すると、上記の新たに出来た M は almost smooth になることがわかる。しかも trade される 3 handles の dual は trivial に attach されているため新たな M の基本群はやはり 1 である。新たな (W, M) に対して $H_*(W, M) = 0$ for $\forall *$, また $W' = \overline{X \times R - W}$ に対しても $H_*(W', M) = 0$ が示される。よって 5 次元の TOP engulfing 定理によって定理 I が証明される。定理 II を示すためには、$N(X)$ の各点の近傍系 N_i $i = 0, 1, 2 \cdots \infty$; $N_i \subset \mathrm{Int}\, N_{i-1}$ $N_{i-1} - N_i \simeq 0$, $\bigcap_{i=0}^{\infty} N_i = 1$ 点 $\in N(X)$ なる $\{N_i\}$ がとれることに注意し、Propositions, (Freedman) の定理をいずれも relative form に改変する。たとえば proper h cobordism 定理は次の形になる。

(W, M, M') 5 次元 C^∞ proper h cobordism で codim 0 の submanifold の列

$M = M_0 \supset M_1 \supset M_2, \cdots \supset M_L$ が存在して

$\pi_1 M_i \to \pi_1 M_{i-1}$ はすべて 0 map. かつ W は $\overline{M - M_L}$ 上 smooth product とする。このとき W は

product cobordism となる。ただし ε は manifold (W, M, M′) によらない整数である。

その他 定理Ⅰの証明を然るべく改変する必要があるが、定理Ⅱの証明も基本的には定理Ⅰのそれと共通である。

参考文献

[Freedman] M.H. Freedman The topology of four dimensional manifolds, preprint

[Freedman, Quinn]: M.H. Freedman F. Quinn., Slightly singular 4 manifolds, TOPOLOGY 20 (1981) 161-173

[Scharlemann] M.G. Scharlemann, Transversality theories at dimension four, Invent. Math 33 (1976), 1-14